

# Eine makroskopisch reale Quantentheorie

Von HELMUT SCHMIDT \*

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Köln

(Z. Naturforsch. 18 a, 265—275 [1963]; eingegangen am 5. Oktober 1962)

Die konventionelle Quantentheorie gibt keine reale, d. h. vom Beobachter unabhängige Naturbeschreibung. Wenn wir verlangen, daß es wenigstens im makroskopischen Bereich eine absolute Realität der Naturerscheinungen geben soll, so müssen wir die Quantentheorie abändern.

Eine derartige Möglichkeit wird besprochen: Wir diskutieren hier ein Modell einer Quantentheorie, die für kleine Systeme mit der üblichen Theorie übereinstimmt, für große Systeme jedoch derart davon abweicht, daß die absolute Realität makroskopischer Größen erhalten bleibt.

Wir erreichen das durch ein Zusatzglied in der Bewegungsgleichung für die Dichtematrix. Dieses Zusatzglied spielt bei kleinen Systemen keine Rolle. Bei makroskopischen Systemen jedoch bewirkt es eine automatische Reduktion der Dichtematrix, so „als ob“ alle makroskopischen Größen des Systems dauernd beobachtet würden.

## I. Einleitung

### 1. Das Realitätsproblem in der Quantentheorie

Die Quantentheorie eignet sich zwanglos zur Beschreibung eines physikalischen Systems, das von außen beobachtet wird. Versuchen wir jedoch die Welt als Ganzes, einschließlich aller Beobachter, durch die gewohnten quantenmechanischen Bewegungsgleichungen darzustellen, so können wir diese Gleichungen nicht mehr befriedigend physikalisch deuten.

Die Wurzel dieser viel diskutierten Schwierigkeit liegt in zwei Axiomen der Quantentheorie, wonach erstens ein quantenmechanisches System durch einen Zustandsvektor prinzipiell bestmöglich beschreibbar sein soll, und zweitens dieser Zustandsvektor einer linearen Bewegungsgleichung, der SCHRÖDINGER-Gleichung, gehorchen soll. Diese beiden Axiome haben zur Folge, daß die Quantentheorie keine im gewohnten Sinne reale, vom Beobachter unabhängige Naturbeschreibung geben kann.

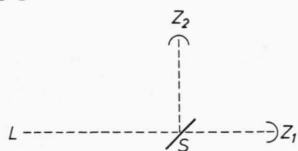


Abb. 1. Ein von L kommendes Lichtquant wird an dem halbdurchlässigen Spiegel S in zwei Teilpakete aufgespalten, die dann anschließend auf die Lichtzähler  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  treffen.

Betrachten wir zur Veranschaulichung der Verhältnisse zunächst die Versuchsanordnung von Abb. 1. Hier wird ein von der Quelle L ausgehendes Lichtquant an dem halbdurchlässigen Spiegel S in zwei

Teilpakete aufgespalten, die dann anschließend auf die Lichtzähler  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  treffen.

Der Zustandsvektor  $\zeta\rangle$  des in Abb. 1 gezeichneten Systems sei, kurz bevor das Lichtquant den Spiegel erreicht, so beschaffen, daß er alle makroskopischen Eigenschaften des Systems eindeutig festlegt. Wir nennen einen solchen Zustandsvektor „makroskopisch einheitlich“. Nachdem nun jedoch die beiden Teilpakete des aufgespaltenen Lichtquants die Zähler erreicht haben, ist der Zustandsvektor  $\zeta'\rangle$  des Systems nicht mehr makroskopisch einheitlich, sondern enthält zwei makroskopisch verschiedene Anteile:

$$\zeta'\rangle = (1/\sqrt{2}) \{ \zeta_1\rangle + \zeta_2\rangle \}.$$

Dabei entspricht  $\zeta_1\rangle$  einem Zustand, bei welchem der erste Zähler das Quant registriert hat, und  $\zeta_2\rangle$  dem hiervon makroskopisch verschiedenen Zustand, bei welchem der zweite Zähler angesprochen hat. Wegen der Linearität der SCHRÖDINGER-Gleichung bleiben nun weiterhin diese beiden, makroskopisch verschiedenen Komponenten des Zustandsvektors nebeneinander bestehen.

Nehmen wir nun einmal an, es gäbe im makroskopischen Bereich eine absolute, vom Beobachter unabhängige Realität. Dann müßte in unserem Beispiel gleich nach dem Eintreffen der Wellenpakete bei den Zählern genau ein Zähler „tatsächlich“ ansprechen, d. h. nur eine Komponente,  $\zeta_1\rangle$  oder  $\zeta_2\rangle$ , des Zustandsvektors wäre wirklich „realisiert“. In diesem Fall jedoch müßte es für das System neben dem Zustandsvektor noch physikalisch sinnvolle „Realitätsparameter“ geben, die festlegen, welche von den im Zustandsvektor enthaltenen makroskopischen Möglichkeiten (hier  $\zeta_1\rangle$  und  $\zeta_2\rangle$ ) tatsächlich realisiert sind. Ob diese Realitätsparameter kausalen

\* Gekürzte und ergänzte Kölner Habilitationsschrift.



Bewegungsgleichungen gehorchen, wie etwa im BOHMSchen Modell<sup>1</sup>, oder ob sie prinzipiell nur statistisch beschreibbar sind, steht dabei noch offen.

Fordern wir nun jedoch umgekehrt, daß es keine derartigen verborgenen Parameter geben soll, so folgt bei Annahme einer linearen SCHRÖDINGER-Gleichung, daß keine absolute, vom Beobachter unabhängige Realität existiert.

Die praktische Anwendbarkeit der Quantentheorie wird durch die Nicht-Existenz einer absoluten Realität allerdings in keiner Weise beeinträchtigt. Nur dürfen wir den Zustandsvektor nicht als physikalisch reale Größe im gewohnten Sinne deuten. Wir müssen vielmehr annehmen, daß der Zustandsvektor nur die Kenntnis eines Beobachters von dem betrachteten System charakterisiert.

Sehr kraß tritt jedoch die Problematik des Realitätsbegriffes hervor, wenn wir versuchen, die ganze Welt, einschließlich aller menschlichen Beobachter, durch einen Zustandsvektor zu beschreiben. Die obige Deutung des Zustandsvektors als Maß für die Kenntnis eines äußeren Beobachters bleibt hier nicht mehr anwendbar, weil kein solcher Beobachter da ist. Die einzige, wohl logisch mögliche, aber sehr abstrakte Deutung des Zustandsvektors ist dann die von EVERETT<sup>2</sup> ausführlich diskutierte:

Der Zustandsvektor der Welt folgt der SCHRÖDINGER-Gleichung. Mit diesem makroskopisch nicht einheitlichen Zustandsvektor sind dann sehr viele makroskopisch verschiedene Weltabläufe verträglich. Die physikalische Wirklichkeit besteht nun aus der Gesamtheit dieser möglichen Welten. Alle diese Weltabläufe sind gleich real, sie gehören nur zu verschiedenen Zweigen der Wirklichkeit. Wegen der Linearität der SCHRÖDINGER-Gleichung stören sich dabei die verschiedenen Zweige nicht gegenseitig. Das erklärt, warum wir nur „unseren“ Zweig der Wirklichkeit sehen können.

Bei dem oben besprochenen Versuch würde dann, sobald die Wellenpakete die Zähler erreichen, jeder Zweig der Wirklichkeit erneut aufspalten, in eine reale Welt, in welcher der Zähler  $Z_1$  tatsächlich angesprochen hat, und in eine ebenso reale Welt, in welcher  $Z_2$  angesprochen hat. Wenn wir nun bei dem Experiment z. B. das Ansprechen des Zählers  $Z_1$  tatsächlich beobachten, so muß ein Double von uns im anderen Zweig der Wirklichkeit das Ansprechen von  $Z_2$  beobachtet haben.

## 2. Versuche zur Vermeidung des Realitätsproblems

Wenn auch die zuletzt ausgeführte Deutung der Quantentheorie widerspruchsfrei ist, so mag sie doch zu einer gewissen Skepsis führen, gegenüber den Axiomen, die dieser Deutung zugrunde liegen. Diese Axiome sind:

1. Der Zustandsvektor beschreibt ein System prinzipiell bestmöglich.
2. Der Zustandsvektor folgt einer *linearen* SCHRÖDINGER-Gleichung.
3. Der Formalismus der Quantentheorie läßt sich auf die Welt als Ganzes anwenden.

Tatsächlich kann man die ganze Problematik um den Realitätsbegriff vermeiden, wenn man auf das erste Axiom verzichtet und verborgene Parameter einführt. Wie BOHM<sup>1</sup> gezeigt hat, gelangt man so zu einer kausalen Theorie, die sich ebenso real deuten läßt wie die klassische Mechanik.

Dies ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit zur Vermeidung des Realitätsproblems. So hat man schon, in Anbetracht der Sonderstellung des menschlichen Beobachters im Rahmen der Quantentheorie, wiederholt die Vermutung ausgesprochen, daß die Quantentheorie auf den Beobachter selbst nicht mehr anwendbar sei. Insbesondere haben etwa BOHR und PAULI<sup>3</sup> betont, daß die alleinige Gültigkeit der Quantentheorie dort aufhören könnte, wo das Leben beginnt.

Eine primitivere Möglichkeit wäre die, daß die übliche Quantentheorie nur für kleine Systeme gilt, wobei Abweichungen von der Theorie also nicht nur bei Lebewesen, sondern ganz allgemein bei großen Systemen auftreten. Tatsächlich ist ja z. B. unser zweites Axiom, die Linearität der SCHRÖDINGER-Gleichung, bisher nur für sehr kleine Systeme geprüft. So waren etwa bei den Streuexperimenten, die zur Bestätigung der Quantentheorie beigetragen haben, im wesentlichen nur zwei Teilchen beteiligt. Andererseits ergeben sich die Realitäts-Schwierigkeiten erst dann, wenn wir die Gültigkeit des zweiten Axioms auch für makroskopische Systeme annehmen. Diese Extrapolation könnte durchaus unzulässig sein.

Wir wollen im folgenden ein konkretes Beispiel einer Quantentheorie angeben, welche die Gültigkeit des zweiten Axioms nur für kleine Systeme fordert, aber dafür eine reale, vom Beobachter unabhängige

<sup>1</sup> D. BOHM, Phys. Rev. **85**, 166 [1952].

<sup>2</sup> H. EVERETT, Rev. Mod. Phys. **29**, 454 [1957].

<sup>3</sup> W. PAULI, Physik und Erkenntnistheorie, Vieweg, Braunschweig 1961.

Beschreibung der makroskopischen Naturvorgänge erlaubt. Wir werden dazu die übliche Bewegungsgleichung für die Dichtematrix durch ein Zusatzglied erweitern, welches nur bei großen Systemen wirksam wird und dort das Auftreten von makroskopisch nicht einheitlichen Zustandsvektoren verhindert. Die Reduktion der Dichtematrix, die in der konventionellen Quantentheorie bei einer Beobachtung des Systems vorzunehmen ist, wird von der neuen Bewegungsgleichung automatisch erreicht, auch ohne äußere Beobachtung des Systems. Damit bleibt unsere Theorie statistisch, die Quantensprünge verlaufen unkausal. Im Gegensatz zur konventionellen Theorie kann man diese Quantensprünge hier jedoch als reale, vom Beobachter unabhängige Prozesse auffassen. Der Grundgedanke unserer Theorie wird besonders durchsichtig, wenn wir zunächst die Hilfsvorstellung von einem „Universalbeobachter“ einführen.

### 3. Die Hilfsvorstellung von einem „Universalbeobachter“

Denken wir uns also zur Veranschaulichung der später mathematisch zu formulierenden Theorie einen „Universalbeobachter“, d. h. einen Beobachter, der sich außerhalb der Welt befindet und nach einem festgelegten Schema sehr häufig praktisch alle makroskopischen physikalischen Größen unserer Welt ausmißt. Dann brauchten diese makroskopischen Beobachtungen den Ablauf der Welt nicht zu stören, so daß wir also die Existenz des Universalbeobachters gar nicht bemerken könnten.

Andererseits ließe sich jetzt eine absolute Realität definieren, nämlich unter Bezugnahme auf den Universalbeobachter. Insbesondere könnte man die vom Universalbeobachter verursachten Quantensprünge des Welt-Zustandsvektors als reale Prozesse auffassen. Weiterhin brauchten nun die (letzten Endes makroskopischen) Messungen eines menschlichen Beobachters (innerhalb der Welt) keine zusätzlichen Quantensprünge mehr auszulösen.

Betrachten wir dazu noch einmal den in Abb. 1 skizzierten Versuch. Sobald die Wellenpakete die Zähler erreicht haben, registriert jetzt sofort der Universalbeobachter, welcher der beiden Zähler angesprochen hat, d. h. der Quantensprung von  $\zeta'$  nach  $\zeta_1$  oder  $\zeta_2$  vollzieht sich ohne Zutun des menschlichen Beobachters. Letzterer kann nur noch den bereits erfolgten Quantensprung zur Kenntnis nehmen.

Der Übergang des Zustandsvektors  $\zeta'$  bei der Messung in ein statistisches Gemisch von  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  läßt sich besonders einfach mit Hilfe der Dichtematrix des Systems beschreiben: Die Dichtematrix

$$\varrho = \zeta' \langle \zeta' = \frac{1}{2} \{ \zeta_1 \rangle \langle \zeta_1 + \zeta_2 \rangle \langle \zeta_2 + \zeta_1 \rangle \langle \zeta_2 + \zeta_2 \rangle \langle \zeta_1 \}$$

geht bei der Messung in die reduzierte Dichtematrix

$$\tilde{\varrho} = \frac{1}{2} \{ \zeta_1 \rangle \langle \zeta_1 + \zeta_2 \rangle \langle \zeta_2 \}$$

über.

Zur mathematischen Formulierung der Theorie gehen wir nun von dem Gedanken aus, daß die zeitliche Veränderung der Dichtematrix eines Systems so erfolgen soll, „als ob“ es einen Universalbeobachter gäbe. Haben wir dann einmal eine entsprechende Bewegungsgleichung für die Dichtematrix gefunden, so können wir die anschauliche Vorstellung vom Universalbeobachter wieder fallen lassen.

Wir besprechen jetzt zunächst allgemein die Änderung der Dichtematrix bei einer Messung. Speziell wird uns dann der Fall interessieren, wo ein von vielen Teilchen erzeugtes Kraftfeld makroskopisch ausgemessen wird. Das ist deshalb für uns besonders interessant, weil sich die oben erwähnte „Messung aller makroskopischen Observablen“ im wesentlichen durch die makroskopische Ausmessung etwa des Gravitationsfeldes erreichen läßt.

## II. Reduktion der Dichtematrix bei einer unvollständigen Messung

Wir wollen hier im Rahmen der konventionellen Quantentheorie den Einfluß einer Messung auf irgendein System untersuchen. Zunächst betrachten wir der Einfachheit halber die Messung einer Observablen mit diskretem Spektrum. Danach gehen wir auf die makroskopische, gleichzeitige Messung vieler Observablen mit kontinuierlichem Spektrum ein. Besonders wird uns die näherungsweise, makroskopische Ausmessung eines von vielen Teilchen erzeugten Kraftfeldes (z. B. Gravitationsfeld) interessieren.

### 1. Messung einer Observablen mit diskretem Spektrum

#### a) Definition einer Idealmessung:

Wir betrachten die Messung einer Observablen  $A$  mit diskretem Spektrum. Die Eigenvektoren und Eigenwerte von  $A$  seien  $\zeta_n$  bzw.  $\lambda_n$ , mit  $n=0, 1, 2, \dots$ , also

$$A \zeta_n = \lambda_n \zeta_n. \quad (1)$$

Dabei wollen wir  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  voraussetzen.



Der Zustandsvektor direkt vor der Messung sei

$$|\zeta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\zeta_n\rangle. \quad (2)$$

Die zugehörige Dichtematrix lautet

$$\varrho = |\zeta\rangle\langle\zeta| = \sum_{n,m} c_n c_m^* |\zeta_n\rangle\langle\zeta_m|. \quad (3)$$

Eine „Idealmessung“ oder „vollständige Messung“ wird nun allgemein durch die Forderung definiert<sup>4</sup>, daß dabei die Phasenbeziehungen zwischen je zwei Komponenten  $|\zeta_n\rangle$  und  $|\zeta_m\rangle$  von  $|\zeta\rangle$  völlig zerstört werden, wenn  $\lambda_n \neq \lambda_m$ , jedoch erhalten bleiben für  $\lambda_n = \lambda_m$ .

b) Allgemeine Definition einer unvollständigen Messung:

Wir wollen nun eine unvollständige Messung so definieren, daß dabei die Phasenkorrelation zwischen

zwei Komponenten  $|\zeta_n\rangle$  und  $|\zeta_m\rangle$  des Zustandsvektors auch für  $\lambda_n \neq \lambda_m$  nicht ganz zerstört wird. Zu diesem Zweck denken wir uns eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $W(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$  gegeben, mit

$$\int \dots \int W(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots) d\varphi_0 d\varphi_1 d\varphi_2 \dots = 1, \quad (a)$$

$$W(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots) \geq 0, \quad (b)$$

$$W(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots) = W(-\varphi_0, -\varphi_1, -\varphi_2, \dots). \quad (c)$$

(4)

Und nun postulieren wir:

Bei der Messung soll der Zustandsvektor  $|\zeta\rangle$  [Gl. (2)] mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $W(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$  überspringen in

$$|\zeta_{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots}\rangle = \sum_n c_n e^{i\varphi_n} |\zeta_n\rangle. \quad (5)$$

Oder anders ausgedrückt:

Die Dichtematrix  $\varrho$  [Gl. (3)] soll bei der Messung übergehen in

$$\begin{aligned} \varrho' = \int \dots \int d\varphi_0 d\varphi_1 \dots W(\varphi_0, \varphi_1, \dots) |\zeta_{\varphi_0, \varphi_1, \dots}\rangle\langle\zeta_{\varphi_0, \varphi_1, \dots}| &= \sum_{n,m} |\zeta_n\rangle\langle\zeta_m| c_n c_m^* \\ &\cdot \int \dots \int d\varphi_0 d\varphi_1 \dots W(\varphi_0, \varphi_1, \dots) \exp\{i(\varphi_n - \varphi_m)\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Eine beliebige Dichtematrix

$$\varrho = \sum_{n,m} \varrho_{nm} |\zeta_n\rangle\langle\zeta_m| \quad (7)$$

geht dann bei der Messung über in

$$\varrho' = \sum_{n,m} \varrho'_{nm} |\zeta_n\rangle\langle\zeta_m| = \sum_{n,m} \varrho_{nm} \gamma_{nm} |\zeta_n\rangle\langle\zeta_m| \quad (8)$$

mit

$$\gamma_{nm} = \int \dots \int d\varphi_0 d\varphi_1 \dots W(\varphi_0, \varphi_1, \dots) \cdot \exp\{i(\varphi_n - \varphi_m)\}. \quad (9)$$

Die Koeffizienten  $\gamma_{nm}$  charakterisieren hier die Art der Messung. Sie erfüllen wegen (9) die folgenden Bedingungen:

$$\gamma_{nn} = 1 \quad \text{für alle } n, \quad (a)$$

$$\gamma_{nm} = \gamma_{mn} \quad \text{ist reell,} \quad (b)$$

$$|\gamma_{nm}| \leq 1, \quad (c)$$

$$\text{die Matrix der } \gamma_{nm} \text{ ist nicht-negativ definit.} \quad (d)$$

(10)

Die letzte Bedingung folgt, weil für beliebige  $c_0, c_1, \dots$  gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{nm} c_n^* c_m \gamma_{nm} &= \\ \int \dots \int d\varphi_0 d\varphi_1 \dots W(\varphi_0, \varphi_1, \dots) \left| \sum_n c_n e^{-i\varphi_n} \right|^2. \end{aligned}$$

Wir wollen hier nicht untersuchen, wieweit diese Bedingungen auch hinreichend für die Existenz mindestens einer zugehörigen Funktion  $W$  sind.

c) Speziellere Definition einer unvollständigen Messung:

Auch ohne Bezugnahme auf die Funktion  $W(\varphi_0, \varphi_1, \dots)$  läßt sich eine Messung definieren, nur durch Angabe der  $\gamma_{nm}$ . Wir wollen hier nun noch eine engere Klasse von Messungen betrachten, indem wir fordern, daß sich die  $\gamma_{nm}$  in der Form darstellen lassen:

$$\gamma_{nm} = f(\eta_n - \eta_m). \quad (11)$$

Die Funktion  $f(x)$  soll dabei die Bedingungen erfüllen

$$f(x) = f(-x), \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0, \quad (12)$$

$$f(x) \text{ ist stetig und monoton im Intervall } (0, \infty).$$

Weiterhin seien die Größen  $\eta_n$  den Eigenwerten  $\lambda_n$  monoton zugeordnet, so daß also

$$\eta_n = g(\lambda_n), \quad (13)$$

wobei  $g(x)$  eine stetige, monoton wachsende Funktion ist.

<sup>4</sup> Vgl. etwa G. LUDWIG, Die Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin 1954, Abschn. II, § 3.



Durch den Ansatz (11) werden die Bedingungen (10 a, b, c) automatisch erfüllt. Wir müssen jetzt nur noch untersuchen, für welche Funktionen  $f(x)$  auch (10 d) gilt<sup>5</sup>.

Die Matrix  $\gamma_{nm} = f(\eta_n - \eta_m)$  wird jedenfalls dann nicht-negativ definit, wenn der Kern  $f(x-y)$  nicht-negativ definit ist, d. h. wenn für jede reelle Funktion  $\varphi(x)$ :

$$J = \iint dx dy \varphi(x) f(x-y) \varphi(y) \geq 0. \quad (14)$$

Setzt man nämlich hierin

$$\varphi(x) = \sum_n c_n \delta(x - \eta_n) \quad (15)$$

mit beliebigen reellen  $c_n$ , so folgt

$$J = \sum_{n,m} c_n c_m f(\eta_n - \eta_m) = \sum_{n,m} c_n c_m \gamma_{nm} \geq 0. \quad (16)$$

Weiter ist die Bedingung (14) auch notwendig, sofern die Eigenwerte praktisch dicht liegen.

Unsere Forderung (14) ist äquivalent mit der Forderung

$$\int_0^\infty f(x) \cos kx dx \geq 0, \text{ für alle Werte von } k, \quad (17)$$

denn setzt man in (14)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int dk \varphi[k] e^{ikx}, \\ f(x-y) &= \int dq f[q] e^{-iq(x-y)}, \end{aligned}$$

$$\text{so wird} \quad J = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq f[q] |\varphi[q]|^2.$$

$J \geq 0$  für alle  $\varphi(x)$  bedeutet also  $f[q] \geq 0$ , was durch (17) ausgedrückt wird.

d) Beispiele:

Als naheliegendes Beispiel für eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $W$  betrachten wir

$$\begin{aligned} W(\varphi_0, \varphi_1, \dots) &= \delta(\varphi_0) \frac{\exp\{- (\varphi_1 - \varphi_0)^2 / 4 \alpha (\eta_1 - \eta_0)\}}{\sqrt{4\pi\alpha(\eta_1 - \eta_0)}} \\ &\cdot \frac{\exp\{- (\varphi_2 - \varphi_1)^2 / 4 \alpha (\eta_2 - \eta_1)\}}{\sqrt{4\pi\alpha(\eta_2 - \eta_1)}} \cdot \dots \quad (18) \end{aligned}$$

[Dabei sind die  $\eta_n$  gemäß (13) den  $\lambda_n$  zugeordnet,

mit  $\eta_0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots$ ] Aus (9) und (18) erhält man

$$\gamma_{nm} = \exp\{-\alpha |\eta_n - \eta_m|\}. \quad (19)$$

Eine Phasenbeziehung zwischen zwei Komponenten  $\zeta_n$  und  $\zeta_m$  des Zustandsvektors wird also bei dieser Art von Messung um so stärker gestört, je größer  $\alpha |\eta_n - \eta_m|$  ist. Für  $\alpha = 0$  insbesondere bleiben alle Phasenbeziehungen erhalten, es findet also praktisch keine Messung statt. Im anderen Grenzfall  $\alpha \rightarrow \infty$  wird dagegen

$$\begin{aligned} \gamma_{nm} &= 0, & \text{wenn } \lambda_n \neq \lambda_m, \\ \gamma_{nm} &= 1, & \text{wenn } \lambda_n = \lambda_m. \end{aligned} \quad (20)$$

Hier liegt also eine Idealmessung im oben definierten Sinne vor.

Dem Ausdruck (19) entspricht nach (11) eine Funktion

$$f(x) = \exp\{-\alpha |x|\}. \quad (21)$$

Man bestätigt leicht, daß die Bedingung (17) erfüllt ist.

Die Funktion

$$f(x) = \exp\{-bx^2\} \quad \text{mit } b > 0 \quad (22)$$

erfüllt auch die Bedingung (17). Durch

$$\gamma_{nm} = \exp\{-b(\eta_n - \eta_m)^2\} \quad (23)$$

wird also ebenfalls ein möglicher Meßprozeß beschrieben.

## 2. Makroskopische Ausmessung eines von vielen mikroskopischen Teilchen erzeugten Kraftfeldes

Wir denken uns ein System von  $N$  Teilchen mit den Ortsvektoren  $r_1, r_2, \dots, r_N$  und den Massen  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . Diese Teilchen mögen das Potential erzeugen

$$V(r) = \sum_{i=1}^N m_i \Phi(r - r_i). \quad (24)$$

Wir fragen nun: Wie ändert sich die Dichtematrix des Systems bei einer makroskopischen Ausmessung des Feldes im ganzen Raum?

<sup>5</sup> Die Forderung (10 d) ist notwendig, damit jede Dichtematrix  $\varrho_{nm}$  wieder in eine Dichtematrix  $\varrho'_{nm} = \gamma_{nm} \varrho_{nm}$  übergeht. Sobald also  $\varrho$  keine negativen Eigenwerte hat, muß dasselbe auch für  $\varrho'$  gelten. Setzen wir speziell  $\varrho_{nm} = c_n c_m$ , mit beliebigen reellen  $c_i$ , so muß die Matrix

$\varrho'_{nm} = \gamma_{nm} c_n c_m$  nicht-negativ definit sein, d. h. für alle reellen  $d_i$  muß gelten

$$0 \leq \sum_{nm} \varrho'_{nm} d_n d_m = \sum_{nm} \gamma_{nm} c_n c_m d_n d_m, \quad \text{oder}$$

$$0 \leq \sum_{nm} \varrho_{nm} h_n h_m \quad \text{für alle reellen } h_i, \text{ q. e. d.}$$

Im Gegensatz zu vorhin hat hier der Wert  $V(r)$  mit des Feldes an einem speziellen Raumpunkt ein kontinuierliches Spektrum, und weiterhin soll das Feld an praktisch allen Raumpunkten gleichzeitig gemessen werden.

Die gemeinsamen Eigenvektoren der zu messenden Operatoren  $V(r)$  sind <sup>6</sup>

$$\zeta_{r'_1, \dots, r'_N} = \delta^3(r_1 - r'_1) \delta^3(r_2 - r'_2) \dots \delta^3(r_N - r'_N). \quad (25)$$

Dafür wird

$$V(r) \zeta_{r'_1, \dots, r'_N} = F(r, r'_1, \dots, r'_N) \zeta_{r'_1, \dots, r'_N} \quad (26)$$

$$F(r, r'_1, \dots, r'_N) = \sum_{i=1}^N m_i \Phi(r - r'_i). \quad (27)$$

Wir wollen zunächst die Messung des Feldes an nur einem Ort  $r = \mathfrak{R}$  betrachten. Dabei legen wir die Funktion  $f(x)$  aus (22) zur Beschreibung des Meßprozesses zugrunde. Weiter setzen wir in (13) einfach  $g(x) = x$ . In Übertragung unserer früheren Ergebnisse auf den kontinuierlichen Fall ersetzen wir nun also die diskreten  $\eta_n$  durch die kontinuierlichen Größen  $F(\mathfrak{R}, r'_1, \dots, r'_N)$ .

Die Dichtematrix

$$\varrho = \int \dots \int dr'_1 \dots dr'_N dr''_1 \dots dr''_N \varrho_{r'_1, \dots, r'_N, r''_1, \dots, r''_N} \zeta_{r'_1, \dots, r'_N} \langle \zeta_{r''_1, \dots, r''_N} | \quad (28)$$

geht dann bei der Messung über in  $\varrho'$ , mit

$$\varrho'_{r'_1, \dots, r'_N} = \varrho_{r'_1, \dots, r'_N} \cdot \exp \{ -a [F(\mathfrak{R}, r'_1, \dots, r'_N) - F(\mathfrak{R}, r''_1, \dots, r''_N)]^2 \}. \quad (29)$$

Bei gleichzeitiger Messung an zwei Raumpunkten  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R}'$  erhält man entsprechend (man denke sich die Messungen etwa kurz hintereinander ausgeführt):

$$\varrho'_{r'_1, \dots, r'_N} = \varrho_{r'_1, \dots, r'_N} \cdot \exp \{ -a [F(\mathfrak{R}, r'_1, \dots, r'_N) - F(\mathfrak{R}', r''_1, \dots, r''_N)]^2 \} \cdot \exp \{ -a [F(\mathfrak{R}, r'_1, \dots, r'_N) - F(\mathfrak{R}, r''_1, \dots, r''_N)]^2 \}. \quad (30)$$

Bei gleichzeitiger makroskopischer Ausmessung des gesamten Feldes können wir deshalb die Reduktion der Dichtematrix in der Form ansetzen:

$$\varrho'_{r'_1, \dots, r'_N} = \varrho_{r'_1, \dots, r'_N} \cdot \exp \{ -d \int d^3r [F(r, r'_1, \dots, r'_N) - F(r, r''_1, \dots, r''_N)]^2 \}. \quad (31)$$

Bei dieser Reduktion wird eine Phasenbeziehung zwischen zwei Komponenten  $\zeta_{r'_1, \dots, r'_N}$  und  $\zeta_{r''_1, \dots, r''_N}$  des Zustandsvektors um so mehr gestört, je mehr sich die beiden zugehörigen Felder

$$F'(r) = \sum_i m_i \Phi(r - r'_i) \quad \text{und} \quad F''(r) = \sum_i m_i \Phi(r - r''_i)$$

voneinander unterscheiden, d. h. je größer der Ausdruck  $\int d^3r [F'(r) - F''(r)]^2$  wird.

### III. Eine makroskopisch reale Quantentheorie

#### 1. Mathematische Formulierung eines Universalbeobachters

Unser oben erwähnter Universalbeobachter sollte alle makroskopischen Größen der Welt dauernd beobachten. Näherungsweise wird diese Forderung schon erfüllt, wenn er nur die makroskopische Massenverteilung überall in der Welt dauernd beobachtet. Damit kennt er nämlich Ort und Impuls aller makroskopischen Massen, also auch Zeigerstellungen von Meßinstrumenten, den Text von geschriebenen Versuchsprotokollen usw. (Wir wollen hier nicht weiter diskutieren, welche makroskopischen Eigenschaften der Welt sich nicht allein aus der dauernden Beobachtung der makroskopischen Massenverteilung erschließen lassen.)

Nehmen wir also an, unser Universalbeobachter verfolge die makroskopische Massenverteilung in der Welt durch häufige makroskopische Ausmessung des Gravitationsfeldes. Den Einfluß einer solchen Aus-

<sup>6</sup> Man beachte, daß die  $r_i$  (Orts-)Operatoren sind, die Parameter  $r, \mathfrak{R}, r'_i, r''_i$  dagegen  $c$ -Zahlen.

messung auf die Dichtematrix haben wir im vorigen Abschnitt untersucht. Wenn wir jetzt noch genau festlegen, wie oft diese Messungen erfolgen sollen, so ist die zeitliche Veränderung der Dichtematrix prinzipiell festgelegt.

Zu einer eleganteren Formulierung gelangt man jedoch mit der Vorstellung, daß das Gravitationsfeld nicht zu diskreten Zeitpunkten, sondern zeitlich kontinuierlich vermessen werden soll, so daß also auch die Reduktion der Dichtematrix kontinuierlich verläuft.

## 2. Kontinuierliche Reduktion der Dichtematrix bei Annahme einer abgeänderten SCHRÖDINGER-Gleichung

Die Bewegungsgleichung für die Dichtematrix lautet in der konventionellen Theorie

$$i \hbar \dot{\rho}(t) = [H, \rho(t)] . \quad (32)$$

Die Änderung von  $\rho$  in der Zeit  $dt$  wird also bei Gültigkeit der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\delta \rho^{(S)} = \frac{1}{i \hbar} [H, \rho] dt . \quad (33)$$

Wir nehmen nun eine zusätzliche Änderung  $\delta \rho^{(M)}$  von  $\rho$  an, so daß

$$(\rho + \delta \rho^{(M)})_{r'_1, \dots, r'_N} = \rho_{r'_1, \dots, r'_N} \cdot \exp \left\{ -g \cdot dt \int d^3 r [F(r, r'_1, \dots) - F(r, r''_1, \dots)]^2 \right\} . \quad (34)$$

Dabei soll  $F(r, r'_1, \dots)$  dem Gravitationsfeld der an den Orten  $r'_1, \dots, r'_N$  befindlichen Massen  $m_1, \dots, m_N$  proportional sein, wobei wir uns die Massen (zur Vermeidung einer andernfalls auftretenden Divergenz, vgl. IV, 3) jedoch nicht streng punktförmig denken, sondern über ein Gebiet der Größe  $r_0$  ausgeschmiert. Wir wollen also etwa annehmen, die Funktion  $\Phi(r)$  aus (27) sei samt ihrer ersten beiden Ableitungen im Nullpunkt stetig, und es sei

$$\Phi(r) = 1/r \quad \text{für} \quad r > r_0 . \quad (35)$$

Die zeitliche Änderung von  $\rho$  wird nun  $\delta \rho = \delta \rho^{(S)} + \delta \rho^{(M)}$  (36)

$$\text{oder} \quad \dot{\rho}_{r'_1, \dots, r'_N} = \frac{1}{i \hbar} [H, \rho]_{r'_1, \dots, r'_N} - g \int d^3 r [F(r, r'_1, \dots) - F(r, r''_1, \dots)]^2 \cdot \rho_{r'_1, \dots, r'_N} . \quad (37)$$

Ein Vergleich von (34) und (31) zeigt, daß die zeitliche Veränderung der Dichtematrix so erfolgt, als ob das Gravitationsfeld der Teilchen dauernd beobachtet würde. Durch passende Wahl der positiven Konstanten  $g$  und  $r_0$  läßt es sich nun erreichen, daß einerseits das Zusatzglied in (37) keine beobachtbaren Interferenzeffekt der konventionellen Theorie beeinträchtigt, daß jedoch andererseits alle Phasenkorrelationen zwischen makroskopisch verschiedenen Zuständen zerstört werden.

### 3. Ein Beispiel für die selbständige Reduktion der Dichtematrix

Wir wollen an einem einfachen Beispiel zeigen, wie das Zusatzglied in (37) eine Phasenkorrelation zwischen makroskopisch verschiedenen Zuständen zerstört.

Der Zustandsvektor  $|\zeta(t)\rangle$  eines aus  $N$  Teilchen bestehenden Systems sei zur Zeit  $t=0$  gegeben durch

$$|\zeta\rangle = (1/\sqrt{2}) \{ |\zeta_A\rangle + |\zeta_B\rangle \} . \quad (38)$$

Dabei soll der Vektor  $|\zeta_A\rangle$  bzw.  $|\zeta_B\rangle$  einen Zustand darstellen, bei dem sich alle  $N$  Teilchen in mikroskopisch kleinen Volumenbereichen A bzw. B aufhalten. Wenn sich nun die Bereiche A und B in einem makroskopischen Abstand voneinander befinden, so sind die Zustände  $|\zeta_A\rangle$  und  $|\zeta_B\rangle$  makroskopisch verschieden, der Vektor  $|\zeta\rangle$  also makroskopisch unscharf, sobald die Teilchenzahl  $N$  genügend hoch ist (derart, daß wir die Ansammlung von  $N$  Teilchen als makroskopisches Gebilde auffassen können).

Im Rahmen der konventionellen Theorie wird der zeitliche Verlauf unseres Zustandsvektors gegeben durch

$$|\zeta(t)\rangle = (1/\sqrt{2}) \{ |\zeta_A(t)\rangle + |\zeta_B(t)\rangle \} \quad (39)$$

mit

$$\begin{aligned} |\zeta_A(t)\rangle &= \exp \{ -i H t / \hbar \} |\zeta_A\rangle , \\ |\zeta_B(t)\rangle &= \exp \{ -i H t / \hbar \} |\zeta_B\rangle . \end{aligned} \quad (40)$$

Nehmen wir an, daß die Teilchen während einer Zeit  $0 < t < t_0$  nicht wesentlich aus den Bereichen A



bzw. B herauswandern, so bleibt hier ein anfänglich makroskopisch unscharfer Zustandsvektor während dieser Zeit makroskopisch unscharf.

Wir werden nun zeigen, daß unter dem Einfluß der neuen Gl. (37) der Zustandsvektor  $\zeta(t)$  in ein statistisches Gemisch von  $\zeta_A(t)$  und  $\zeta_B(t)$  übergeht, und zwar um so schneller, je größer die Anzahl  $N$  der Teilchen, und je größer der Abstand  $b$  der Bereiche ist.

Wir nehmen dabei der Einfachheit halber an, die Bereiche A und B seien klein genug, so daß

$$\int d^3r [F(r, r_1', \dots) - F(r, r_1'', \dots)]^2 \approx \begin{cases} 0, & \text{wenn die } r_1', \dots, r_N'', r_1'', \dots, r_N'' \text{ alle im} \\ & \text{selben Bereich liegen,} \\ p \approx \text{const}, & \text{wenn } r_1', \dots, r_N' \text{ in A und} \\ & r_1'', \dots, r_N'' \text{ in B liegen oder umgekehrt.} \end{cases} \quad (41)$$

Setzen wir weiter noch  $h > r_0$  voraus, so ergibt sich für die Konstante  $p$  [vgl. Gl. (35)]:

$$p = \int d^3r [(N/r_A) - (N/r_B)]^2. \quad (42)$$

Dabei ist über den ganzen Raum zu integrieren, und  $r_A$  bzw.  $r_B$  bedeuten die Abstände des Aufpunktes von den (genügend kleinen) Bereichen A bzw. B. Die elementare Integration liefert ( $b$  = Abstand der Bereiche):

$$p = 4\pi b N^2. \quad (43)$$

Die konventionelle Theorie ergibt nun für den zeitlichen Verlauf der Dichtematrix [Gl. (32)]:

$$\begin{aligned} \varrho(t) &= \zeta(t) \langle \zeta(t) \\ &= \frac{1}{2} \{ \zeta_A(t) \langle \zeta_A(t) + \zeta_B(t) \rangle \langle \zeta_B(t) \\ &\quad + \zeta_A(t) \langle \zeta_B(t) + \zeta_B(t) \rangle \langle \zeta_A(t) \rangle \} \end{aligned} \quad (44)$$

mit  $\zeta(t)$ ,  $\zeta_A(t)$ ,  $\zeta_B(t)$  aus (39), (40).

Die Lösung unserer neuen Bewegungsgleichung (37) dagegen lautet, bei gleicher Anfangsbedingung

$$\varrho(0) = \zeta \langle \zeta, \quad (45)$$

im betrachteten Zeitintervall  $0 < t < t_0$ :

$$\begin{aligned} \varrho(t) &= \frac{1}{2} \{ \zeta_A(t) \langle \zeta_A(t) + \zeta_B(t) \rangle \langle \zeta_B(t) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp \{ -4\pi g b N^2 t \} \\ &\quad \cdot \{ \zeta_A(t) \langle \zeta_B(t) + \zeta_B(t) \rangle \langle \zeta_A(t) \rangle \}. \end{aligned} \quad (46)$$

Mit Hilfe von (40) und (41) bestätigt man leicht, daß dieser Ansatz die Bewegungsgleichung (37) erfüllt.

Die Reduktion der Dichtematrix, d. h. die Zerstörung der Phasenbeziehung zwischen den makroskopisch verschiedenen Zuständen  $\zeta_A$  und  $\zeta_B$  verläuft hier also automatisch, und um so schneller, je größer das Produkt  $b N^2$  ist ( $N$  = Teilchenzahl,  $b$  = Abstand der Bereiche A und B).

## IV. Schlußbemerkungen

### 1. Zeit-Umkehrbarkeit

Alle bekannten Naturvorgänge sind mikroskopisch reversibel, die elementaren Naturgesetze zeichnen also keine Zeitrichtung aus. So ist etwa auch die SCHRÖDINGER-Gleichung und die entsprechende Gl. (32) für die Dichtematrix invariant gegen Zeitumkehr (bei gleichzeitiger Ersetzung von  $i$  durch  $-i$ ).

Da unsere Grundgleichung (37) nicht mehr diese formale Invarianz gegen Zeitumkehr aufweist, könnte man zunächst vermuten, hier werde die mikroskopische Reversibilität zerstört. Das ist jedoch nicht der Fall, denn unsere Grundgleichung ist eine statistische Gleichung.

Die Verhältnisse liegen hier so wie bei der klassischen Diffusionsgleichung. Auch die statistische Diffusionsgleichung zeichnet eine Zeitrichtung aus, obwohl die der Diffusion zugrunde liegenden Elementarprozesse reversibel sind.

Erinnern wir uns in diesem Zusammenhang kurz daran, daß die Auszeichnung einer Zeitrichtung in der üblichen Diffusionsgleichung dadurch bedingt ist, daß schon die Fragenstellung (a) oder die Anfangsbedingung (b) eine Zeitrichtung auszeichnen.

a) Denken wir uns zunächst ein Zucker-Molekül in einem Glas Wasser. Nehmen wir an, das Molekül sei dort lange Zeit sich selbst überlassen und dann, zur Zeit  $t=0$ , schauen wir nach dem Molekül und finden es an der Stelle  $r=0$ . Hier sind uns Zukunft und Vergangenheit des Moleküls in gleicher Weise unbekannt. Die „Anfangsbedingungen“ bevorzugen also keine Zeitrichtung. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $W(r, t)$  für das Molekül zu einem späteren Zeitpunkt  $t > 0$  ergibt sich nun aus der Diffusionsgleichung:

$$\frac{d}{dt} W(r, t) = D \cdot \Delta W(r, t) \quad \text{mit } W(r, 0) = \delta^3(r). \quad (47a)$$

Fragen wir jedoch nach dem Ort des Moleküls zu einer Zeit  $t < 0$ , d. h. bevor das Teilchen am Punkt  $r=0$  ankam, so müssen wir die Gleichung anwenden:

$$\frac{d}{dt} W(r, t) = -D \cdot \Delta W(r, t) \quad \text{mit } W(r, 0) = \delta^3(r). \quad (47b)$$

Bei der Berechnung von  $W(r, t_1)$  aus  $W(r, t_0)$  ist also die Gl. (47a) bzw. (47b) anzuwenden, je nachdem  $t_1 > t_0$  oder  $t_1 < t_0$ . Diese beiden Gleichungen zusam-

men bilden also die volle Diffusionsgleichung, und man sieht leicht, daß so die formale Invarianz gegen Zeitumkehr wiederhergestellt ist. Insbesondere zeigt auch die gemeinsame Lösung von (47 a) und (47 b) formale Invarianz gegen Zeitumkehr:

$$\tilde{W}(r, t) = 1/(4\pi D |t|)^{3/2} \cdot \exp \{ -(r^2/4D |t|) \}. \quad (48)$$

b) Nehmen wir nun andererseits an, wir haben ein Stück Zucker in das Wasser geworfen, der Zucker hat sich aufgelöst, und eine Wolke von Zuckermolekülen diffundiert in das Wasser hinein. Wenn wir nun zu einer Zeit  $t=0$  eine Konzentration  $\tilde{W}(r, 0)$  der Zuckermoleküle beobachten, so berechnet sich hier  $\tilde{W}(r, t)$  aus  $\tilde{W}(r, 0)$  auf Grund der Gl. (47 a), gleichgültig ob  $t > 0$  oder  $t < 0$ . (Der Zeitpunkt  $t$  muß allerdings nach der völligen Auflösung des Zuckeres liegen, da der Auflösungsprozeß nicht der Diffusionsgleichung folgt.) In diesem Fall ist die Auszeichnung einer Zeitrichtung durch die Anfangsbedingungen gegeben. Unsere Vorkenntnis vom System ist nicht zeitsymmetrisch. Wir wissen nämlich, daß sich zu einem früheren Zeitpunkt alle Moleküle dicht beieinander befanden.

## 2. Energiebilanz

Es ist bekannt, daß bei jeder Ortsmessung an einem freien Teilchen die kinetische Energie des Teilchens im Mittel zunimmt. So hat etwa ein anfangs ruhendes Teilchen nach einer Ortsmessung einen um so unschärferen Impuls, und damit eine um so höhere mittlere kinetische Energie, je präziser die Ortsmessung war.

Es ist nun zu erwarten, daß die häufigen makroskopischen Ortsmessungen des Universalbeobachters in unserer Theorie ebenfalls zu einer, wenn auch extrem langsamen, so doch andauernden Zunahme der Gesamtenergie des Systems führen.

Wir wollen diese Vermutung an zwei einfachen Beispielen bestätigen. Dazu betrachten wir zunächst ein aus nur einem freien Teilchen der Masse  $m$  bestehendes System. Hier wird nach (27)

$$\int d^3r [F(r, r') - F(r, r'')]^2 = \int d^3r [\Phi(r - r') - \Phi(r - r'')]^2 = G(r' - r''). \quad (49)$$

Mit der so definierten Funktion  $G$  lautet die Bewegungsgleichung (37) für die Dichtematrix

$$\dot{\varrho}_{r'r''} = \frac{1}{i\hbar} [H, \varrho]_{r'r''} - g G(r' - r'') \varrho_{r'r''}. \quad (50)$$

Die zeitliche Änderung der mittleren Energie wird jetzt

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{H}}{dt} &= \iint d^3r' d^3r'' H_{r'r''} \dot{\varrho}_{r'r''} \\ &= -g \iint d^3r' d^3r'' H_{r'r''} G(r' - r'') \varrho_{r'r''}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\text{mit} \quad H_{r'r''} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \delta^3(r' - r''). \quad (52)$$

Gehen wir nun zu den neuen Variablen über:

$$r = r' - r'', \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{2}(r' + r'') \quad (53)$$

und definieren entsprechend

$$\varrho_{r'r''} = \varrho(r, \mathfrak{R}), \quad (54)$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{H}}{dt} &= \frac{\hbar^2}{2m} g \iint d^3r d^3\mathfrak{R} G(r) \varrho(r, \mathfrak{R}) \Delta \delta^3(r) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} g \int d^3r G(r) \bar{\varrho}(r) \Delta \delta^3(r). \end{aligned} \quad (55)$$

Dabei haben wir eingeführt

$$\bar{\varrho}(r) = \frac{1}{2} \int d^3\mathfrak{R} \{ \varrho(r, \mathfrak{R}) + \varrho(-r, \mathfrak{R}) \} \quad (56)$$

$$\text{mit} \quad \bar{\varrho}(r) = \bar{\varrho}(-r), \quad \bar{\varrho}(0) = 1. \quad (57)$$

Dabei folgt die letzte Gleichung aus

$$\begin{aligned} 1 &= \text{Spur}(\varrho) = \int d^3r d^3r'' \varrho_{r'r''} \delta(r' - r'') \\ &= \int d^3r d^3\mathfrak{R} \varrho(r, \mathfrak{R}) \delta^3(r) = \bar{\varrho}(0). \end{aligned}$$

Durch partielle Integration geht (55) über in

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{\hbar^2}{2m} g \int d^3r \delta^3(r) \Delta \{ G(r) \bar{\varrho}(r) \}. \quad (58)$$

Wenn nun  $G(r)$ ,  $\bar{\varrho}(r)$  und deren beide erste Ableitungen bei  $r \approx 0$  stetig sind, so folgt mit (57) und  $G(0) = 0$  [vgl. Gl. (49)]:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{\hbar^2}{2m} g \Delta G(r)|_{r=0}. \quad (59)$$

Hier können wir noch  $\Delta G(r)|_{r=0}$  durch die Funktion  $\Phi(r)$  ausdrücken. Aus (49) folgt nämlich für  $\mathfrak{d} \approx 0$ , wenn wir noch  $\Phi(r) = \Phi(r)$  annehmen:

$$\begin{aligned} G(\mathfrak{d}) &= \int d^3r [\Phi(r + \mathfrak{d}) - \Phi(r)]^2 \\ &\approx \int d^3r \left( \sum_{i=1}^3 d_i \frac{\partial \Phi(r)}{\partial x_i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \mathfrak{d}^2 \int d^3r (\nabla \Phi)^2 = \frac{4\pi}{3} \mathfrak{d}^2 \int_0^\infty dr r^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Damit wird

$$\Delta G(\mathfrak{D})|_{\mathfrak{D}=0} = 8\pi \int_0^\infty dr r^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2$$

$$\text{oder} \quad \frac{d\bar{H}}{dt} = 4\pi g \frac{\hbar^2}{m} \int_0^\infty r^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 dr. \quad (61)$$

Nehmen wir nun etwa an, die Funktion  $\Phi(r)$  aus (24) sei bestimmt durch

$$\begin{aligned}\partial\Phi/\partial r &= -1/r^2 \quad \text{für } r > r_0, \\ \partial\Phi/\partial r &= -r/r_0^3 \quad \text{für } r < r_0.\end{aligned}\quad (62)$$

Das Potential  $V(r)$  in (24) ist dann mathematisch gleich dem Gravitationspotential von  $N$  Teilchen, deren Massen über kleine Kugeln vom Radius  $r_0$  verschmiert sind. Physikalisch gesehen ist jedoch  $r_0$  nur ein freier Parameter der Theorie, welcher keine Beziehung zum physikalischen Teilchenradius zu haben braucht.

Aus (62) ergibt sich

$$\int_0^\infty r^2 \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)^2 dr = \frac{6}{5} \frac{1}{r_0} \quad (63)$$

und wir erhalten schließlich

$$\frac{dH}{dt} = \frac{24\pi}{5} \frac{\hbar^2}{m} \frac{g}{r_0}. \quad (64)$$

Betrachten wir ein Zahlenbeispiel!

Setzen wir dazu etwa

$$r_0 = 10^{-2} \text{ cm} \quad (65)$$

und wählen wir weiter die Konstante  $g$  derart, daß [vgl. Gl. (46)]

$$4\pi g b N^2 t = 1 \quad \text{für } N = 1, b = 100 \text{ cm}, t = 1/100 \text{ sec},$$

d. h.

$$g = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\text{cm sec}}. \quad (66)$$

Bei dieser Wahl von  $g$  würde [vgl. Gl. (46)] die Interferenzfähigkeit zwischen zwei im Abstand  $b = 100 \text{ cm}$  befindlichen Anteilen eines ausgedehnten Ein-Teilchen-Wellenpaketes gerade im Verlauf von ungefähr  $t = 1/100 \text{ sec}$  zerstört werden.

Nun ergibt sich für die Zeit  $T$ , nach der ein anfänglich ruhendes Elektron eine der Ruheenergie  $m c^2$  vergleichbare kinetische Energie bekommen hat:

$$T = \frac{m c^2}{dH/dt} = \frac{5}{24\pi} \cdot \left( \frac{m c}{\hbar} \right)^2 \cdot \frac{r_0}{g} \approx 10^{19} \text{ sec} \approx 3 \cdot 10^{11} \text{ Jahre}, \quad (67)$$

und die jährliche Energiezunahme des Elektrons

$$\frac{dH}{dt} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ eV/Jahr}. \quad (68)$$

Ein derart „astronomisch kleiner“ Effekt wäre natürlich im Labor nicht zu beobachten, ebensowenig wie die bekannte, durch Expansion des Weltalls bedingte, Abbremsung eines bewegten Elektrons.

Als zweites Beispiel betrachten wir ein Proton, welches in einem tiefen Potentialtopf  $V(r)$  der Ausdehnung  $R = 10^{-13} \text{ cm}$  gebunden ist. Befindet sich das Proton zur Zeit  $t = 0$  im Grundzustand (der konventionellen Theorie), so können auf Grund des Zusatzgliedes in Gl. (50) bzw. (37) jetzt Übergänge in höhere Zustände erfolgen. Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Proton in einer gewissen Zeit vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand übergeht, wobei wir die Zahlenwerte aus (65) und (66) für  $r_0$  und  $g$  zugrunde legen wollen.

Wir gehen aus von Gl. (50). Dabei ist jetzt

$$H = -(\hbar^2/2M) \Delta + V(r), \quad (69)$$

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } |r| < R, \\ \infty & \text{für } |r| > R. \end{cases} \quad (70)$$

Da die Ausdehnung  $R$  der Wellenfunktion klein gegen die Ausdehnung  $r_0$  der Funktion  $\Phi(r)$  aus (62) ist, können wir  $G(r)$  aus (49) wieder approximieren durch

$$G(r) = (8\pi/5) (|r|^2/r_0) \quad (71)$$

[vgl. Gl. (60) u. (63)].

Damit lautet unsere Grundgleichung (50)

$$\dot{\varrho}_{r'r''} = \frac{1}{i\hbar} [H, \varrho]_{r'r''} - \frac{8\pi}{5} \frac{g}{r_0} (r' - r'')^2 \varrho_{r'r''}. \quad (72)$$

Die Eigenfunktionen von  $H$  seien

$$\psi_n(t) \rangle = \psi_n(r, t) \rangle = \psi_n(r) \rangle \exp \{ -i E_n t / \hbar \}. \quad (73)$$

Nun schreiben wir die Dichtematrix allgemein als

$$\varrho(t) = \sum_{n,m} c_{nm}(t) \psi_n(t) \rangle \langle \psi_m(t). \quad (74)$$

Dafür wird

$$\dot{\varrho} - \frac{1}{i\hbar} [H, \varrho] = \sum_{n,m} \dot{c}_{nm}(t) \psi_n(t) \rangle \langle \psi_m(t). \quad (75)$$

Damit lautet (72)

$$\sum_{n,m} \dot{c}_{nm}(t) \psi_n(r', t) \psi_m^*(r'', t) = -\frac{8\pi}{5} \frac{g}{r_0} (r' - r'')^2 \sum_{k,l} c_{kl}(t) \psi_k(r', t) \psi_l^*(r'', t). \quad (76)$$



Daraus folgt 
$$\dot{c}_{nm}(t) = \frac{8\pi}{5} \frac{g}{r_0} \sum_{k,l} I_{nm\,kl} \cdot c_{kl}(t) \cdot \exp \left\{ (i/\hbar) [E_l + E_n - E_k - E_m] \right\}, \quad (77)$$

mit 
$$I_{nm\,kl} = - \int \int d^3r' d^3r'' \psi_n^*(r') \psi_m(r'') (r' - r'')^2 \psi_k(r') \psi_l^*(r''). \quad (78)$$

Sei nun  $\psi_0$  der bei  $t=0$  vorliegende Grundzustand und  $\psi_1$  ein nächst höher angeregter Zustand, so ist also

$$c_{00}(0) = 1, \quad \text{sonst} \quad c_{nm}(0) = 0. \quad (79)$$

Die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit  $t > 0$  den Zustand  $\psi_1$  anzutreffen, wird dann in der ersten Näherung der Störungsrechnung

$$c_{11}(t) = \frac{8\pi}{5} \frac{g}{r_0} I_{1100} \cdot t. \quad (80)$$

Für den Wert der Konstanten  $I_{1100}$  können wir nun leicht eine obere Schranke angeben. Da die Funktionen  $\psi_n(r)$  nur im Gebiet  $|r| < R$  von Null verschieden und überdies normiert sind, gilt nämlich

$$\begin{aligned} |I_{1100}| &= \left| \int \int d^3r' d^3r'' (r' - r'')^2 \psi_1^*(r') \psi_1(r'') \psi_0(r') \psi_0^*(r'') \right| \\ &\leq (2R)^2 \int \int d^3r' d^3r'' |\psi_1(r') \psi_0(r')| \cdot |\psi_1(r'') \psi_0(r'')| \\ &= (2R)^2 \left\{ \int d^3r' |\psi_1(r') \psi_0(r')| \right\}^2 < 4R^2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit

$$\frac{d}{dt} c_{11}(t) < \frac{32\pi}{5} \frac{g}{\gamma_0} R^2 = \frac{8}{5} 10^{-24} \text{ sec}^{-1}; \quad (81)$$

dabei haben wir noch  $R = 10^{-13}$  cm gesetzt.

Erst nach größenordnungsmäßig  $10^{24} \text{ sec} = 3 \cdot 10^{16}$  Jahren wäre also das Proton mit merklicher Wahrscheinlichkeit im ersten angeregten Zustand zu finden.

Betrachten wir statt des Protons im Atomkern ein Elektron im Wasserstoffatom, so hat man, in grober Näherung, den Kernradius  $R \approx 10^{-13}$  cm in Gl. (81) durch den BOHRschen Radius  $R_0 \approx 10^{-8}$  cm zu ersetzen. Für die Lebensdauer des Wasserstoff-Grundzustandes bekommt man aber dann immer noch einen Wert von etwa  $10^6$  Jahren.

Erst nach etwa  $10^6$  Jahren hat also das gebundene Elektron [auf Grund der durch das Zusatzglied in Gl. (37) beschriebenen Ortsmessungen] genügend Energie (ca. 1 eV) zum Übergang in den ersten angeregten Zustand aufgenommen, von wo es dann natürlich sofort wieder unter Lichtemission herunterfällt. [Vgl. dazu den Zahlenwert in Gl. (68).]

### 3. Experimentelle Prüfung der Theorie

Wir hatten unsere Theorie so konstruiert, daß die makroskopischen Naturerscheinungen real, vom Beobachter unabhängig werden. Deshalb muß sich die Theorie jedenfalls im makroskopischen Bereich von der konventionellen Quantentheorie unterscheiden. Dieser Unterschied läßt sich jedoch praktisch nicht feststellen, da wir an makroskopischen Systemen keine Interferenzeffekte beobachten können.

Selbst wenn also der Grundgedanke unserer Theorie richtig ist, so ließe sich das nur in dem „glücklichen“ Fall experimentell bestätigen, daß die Abweichungen von der konventionellen Theorie schon bei sehr kleinen Systemen beginnen würden, daß also unsere Konstante  $g$  genügend groß wäre.

Die Bestätigung der Theorie könnte dann wohl am ehesten in einem Interferenzexperiment gelingen, wobei man (im Prinzip) ein Ein-Elektron-Wellenpaket in zwei Teilpakete aufspaltet, diese Teilpakete dann für möglichst lange Zeit auf möglichst weit voneinander getrennten Wegen laufen läßt und dann prüft, ob die beiden Teilpakete noch die von der konventionellen Theorie geforderte Interferenzfähigkeit haben, oder ob diese Interferenzfähigkeit, in der von Gl. (37) beschriebenen Art, gestört ist.